Nous donnerons, dans un autre article, l'application de ces formules générales au développement de diverses fonctions, et spécialement au développement du rapport entre deux produits de factorielles.

233.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Rapport sur un Mémoire de* M. LAURENT, *qui a pour titre :* Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable x.

C. R., T. XVII, p. 938 (30 octobre 1843).

L'Académie nous a chargés, M. Liouville et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire de M. Laurent relatif à l'extension d'un théorème que l'un de nous a donné dans le Mémoire présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831, et dont il a fourni une démonstration nouvelle dans ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. Le théorème en question peut s'énoncer comme il suit :

x désignant une variable réelle ou imaginaire, une fonction réelle ou imaginaire de x sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable, tant que le module de la variable conservera une valeur inférieure à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être finie ou continue.

En examinant attentivement la première démonstration de ce théorème, M. Laurent a reconnu, comme il le dit lui-même, que l'analyse employée par l'auteur pouvait conduire à un théorème plus général, relatif au développement d'une fonction en une série ordonnée suivant les puissances entières positives, nulle et négatives de la variable. Déjà, dans une des séances de l'Académie, le rapporteur avait montré qu'un semblable développement, lorsqu'il peut s'effectuer entre deux limites données du module de la variable, pour des valeurs quelconques de l'argument de cette variable supposée imaginaire, est toujours unique. Le nouveau théorème démontré par M. Laurent s'accorde avec cette proposition, et peut s'énoncer comme il suit :

x désignant une variable réelle ou imaginaire, une fonction réelle ou imaginaire de x pourra être représentée par la somme de deux séries convergentes, ordonnées, l'une suivant les puissances entières et ascendantes, l'autre suivant les puissances entières et descendantes de x, tant que le module de x conservera une valeur comprise entre deux limites entre lesquelles la fonction ou sa dérivée ne cesse pas d'être finie et continue.

L'équation de laquelle M. Laurent déduit son théorème peut être présentée sous diverses formes et se trouve comprise, comme cas particulier, dans l'une de celles que renferme le Ier Volume des *Exercices de Mathématiques* (1). Il y a plus : le théorème de M. Laurent peut se déduire immédiatement d'une proposition établie dans la troisième livraison des *Exercices d'Analyse* (2), etc., et dont voici l'énoncé :

Si une fonction et sa dérivée restent continues, pour un module de la variable renfermé entre deux limites données, la valeur moyenne de la fonction, correspondante à un module compris entre ces limites, sera indépendante de ce module.

Comme l'a observé M. Laurent, la formule de laquelle se déduit son théorème permet d'effectuer la séparation des racines d'une équation algébrique sans recourir à l'équation aux carrés des différences. Cette observation s'accorde avec les conclusions auxquelles le rapporteur est parvenu dans le XIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (3) et, plus anciennement, dans un Mémoire sur la résolution des équations par les intégrales définies, présenté à l'Académie des Sciences le 22 novembre 1819, Mémoire dont un extrait a été inséré dans l'*Analyse des travaux de l'Académie*.

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VI.
(2) *Ibid.*, S. II, T. XI.
(3) *Ibid.*, S. II, T. I.

L'extension donnée par M. Laurent au théorème sur la convergence des séries, ou plutôt le nouveau théorème qu'il a établi à ce sujet, nous paraît digne de remarque. Ce théorème peut être utilement employé dans des recherches de haute Analyse. Nous pensons, en conséquence, que le Mémoire adressé par M. Laurent à l'Académie est très digne d'être approuvé par elle et d'être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Le rapporteur a joint à ce Rapport la Note suivante, qui indique la manière la plus simple d'arriver au théorème de M. Laurent, en partant des principes établis dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*.

234.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur le développement des fonctions en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières des variables.*

C. R., T. XVII, p. 940 (30 octobre 1843).

Soit

$$x = re^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire dont r représente le module et p l'argument. Soit de plus $\varpi(x)$ une fonction de cette variable qui reste, avec sa dérivée, finie et continue, par rapport à r et à p, entre deux limites données du module r, savoir, depuis la limite $r = r_0$ jusqu'à la limite $r = R$. La fonction $\Pi(r)$ de r, déterminée par l'équation

$$\Pi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varpi(x)\, dp,$$

sera ce que nous appelons la *valeur moyenne* de la fonction $\varpi(x)$, et comme cette valeur moyenne restera invariable depuis $r = r_0$ jusqu'à $r = R$ [*voir* la 9e livraison des *Exercices d'Analyse et de Physique* *mathématique* (¹)], on aura

$$\Pi(\mathrm{R}) = \Pi(r_0). \tag{1}$$

Si, le module r_0 étant nul, $\varpi(x)$ s'évanouit avec x, $\Pi(r_0)$ s'évanouira aussi, et la formule (1) donnera simplement

$$\Pi(\mathrm{R}) = 0. \tag{2}$$

Posons maintenant

$$y = r_0 e^{p\sqrt{-1}}, \qquad z = \mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}$$

et

$$\varpi(z) = z\frac{\mathrm{f}(z) - \mathrm{f}(x)}{z - x},$$

$\mathrm{f}(x)$ désignant une fonction de x qui reste, avec sa dérivée, finie et continue, depuis la limite $r = r_0$ jusqu'à la limite $r = \mathrm{R}$. Alors, en observant que le module r de x est renfermé entre les modules r_0, R des variables y, z et qu'on a, par suite, non seulement

$$\frac{y}{y - x} = -\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} - \frac{y^3}{x^3} - \ldots, \qquad \frac{z}{z - x} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \ldots, \tag{3}$$

mais encore

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{y\,dp}{y - x} = 0, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\,dp}{z - x} = 1,$$

on trouvera

$$\Pi(r_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{y\,\mathrm{f}(y)}{y - x}\,dp, \qquad \Pi(\mathrm{R}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\,\mathrm{f}(z)}{z - x}\,dp - \mathrm{f}(x).$$

Donc l'équation (2) donnera

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\,\mathrm{f}(z)}{z - x}\,dp, \tag{4}$$

et l'équation (1) donnera

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\,\mathrm{f}(z)}{z - x}\,dp - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{y\,\mathrm{f}(y)}{y - x}\,dp. \tag{5}$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XI.

Or, comme en vertu des formules (3), les intégrales comprises dans les valeurs de $\Pi(r_0)$ et de $\Pi(R)$ sont, ainsi que les fonctions renfermées sous le signe $\int$, développables, la première en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et négatives de la variable x, la seconde en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières, nulle et négatives de la même variable, l'équation (4) entraînera évidemment comme conséquence le théorème que j'ai donné sur la convergence des séries qui proviennent du développement des fonctions, et, l'équation (5), le théorème de M. Laurent.

L'équation de laquelle M. Laurent a déduit son théorème est la suivante

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z\,\mathrm{f}(z)}{z-x}\,dp + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\,\mathrm{f}(y)}{x-y}\,dp \\ &\quad - \frac{1}{2\pi(R-r_0)}\int_{r_0}^{R}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}\left(re^{p\sqrt{-1}}\right)dr\,dp, \end{aligned}\right.$$

et semble au premier abord différer de la formule (5). Mais, comme dans notre hypothèse, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{f}(x)$ reste fonction continue de x, depuis la limite $r = r_0$ jusqu'à la limite $r = R$, on a, pour une valeur de r comprise entre ces limites,

$$\Pi(r) = \Pi(r_0)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(y)\,dp$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2\pi(R-r_0)}\int_{r_0}^{R}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}\left(re^{p\sqrt{-1}}\right)dr\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(y)\,dp,$$

il en résulte que la formule (6) peut être réduite à l'équation (5).

Nous avons ici supposé que la fonction $\mathrm{f}(x)$ restait finie et continue depuis la limite du module r représentée par r_0, jusqu'à la limite de r représentée par R. Les formules (4), (5) et (6) deviendraient généralement inexactes dans la supposition contraire, et même dans le cas où la fonction $f(x)$, demeurant finie et continue pour des valeurs de r comprises entre les limites r_0, R, deviendrait infinie ou discontinue pour $r = r_0$ ou pour $r = R$.

235.

ASTRONOMIE. — *Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'Astronomie.*

C. R., T. XVII, p. 1157 (20 novembre 1843).

Dans le Mémoire présenté à l'Académie de Turin en 1831 (¹), j'ai montré comment on pouvait déterminer les limites de l'erreur que l'on commet quand on arrête, après un certain nombre de termes, le développement d'une fonction en une série ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes d'une variable. Le nouveau calcul que j'ai appliqué à la solution de ce problème, et que j'ai nommé *calcul des limites*, prouve que l'erreur commise reste inférieure, quand la série est convergente, au reste d'une certaine progression géométrique. Or un théorème que j'ai donné dans la 9ᵉ livraison des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (²), et qui se rapporte aux valeurs moyennes des fonctions, permet d'étendre cette proposition au cas où il s'agit du développement d'une fonction en une série ordonnée suivant les puissances entières d'une exponentielle trigonométrique. En effet, si l'on considère cette exponentielle comme la valeur particulière d'une variable x, correspondante au module 1, le coefficient de la $n^{\text{ième}}$ puissance de l'exponentielle, dans le développement de la fonction, ne sera autre chose que la valeur moyenne du rapport entre la fonction et la $n^{\text{ième}}$ puissance de x. Or, d'après le théorème en question, on pourra dans cette valeur moyenne remplacer le module 1 par un autre module r, inférieur ou supérieur à l'unité, si la fonction ne

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.
(²) *Ibid.*, S. II, T. XI.