Exercices de baccalauréat série S sur la loi exponentielle

(page de l'énoncé/page du corrigé)

La compagnie d'autocars (Bac série S, centres étrangers, 2003)

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, des troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que la variable D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par :

$$P(D \leq A) = \int_0^A \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx.$$

1. Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit :
   a) comprise entre 50 et 100 km
   b) supérieure à 300 km
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km ?
3. On veut déterminer la distance moyenne parcourue sans incident.
   a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer
   $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x e^{-\frac{x}{82}} dx$ (avec $A \geq 0$)
   b) Calculer la limite de I(A) lorsque A tend vers $+\infty$ (cette limite représente la distance moyenne cherchée).
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. On note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.
   a) Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.
   b) Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.

Durée de vie d'un composant électronique (Bac série S, France métropolitaine, 2004)

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité P de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par $P([0;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$, représentant la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines.

Une étude statistique montrant qu'environ 50% d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser P([0 ; 200[) = 0,5.

1. Montrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{200}$.
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ?
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers +∞ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$. Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$ et en déduire d_m à la semaine près.

Durée de vie d'un oscilloscope (Bac série S, Polynésie, 2004)

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement ou encore loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

1. Sachant que $P(X>10) = 0,286$, montrer que $\lambda = 0,125$ au centième près.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,125$.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné 8 années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Rappel :

Dans le cas de la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0 ; +\infty[$, on a :

- pour $0 \leq a \leq b,\ P([a , b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt$
- pour tout $c \geq 0,\ P([c , +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t}\,dt$

Extrait d'un QCM (Bac série S, Réunion, 2003)

La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :

a. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t)=e^{-0,01t}$

b. Pour tout réel t positif, on a : $P(Y \leq t) = 1 - e^{-0,01t}$

c. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est égale à 0,16 au centième près

d. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute

La fabrique de cylindres (Bac série S, Guadeloupe, Guyane, 2006)

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On rappelle que $P(X\leq a)=\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}dt$.

La courbe donnée en annexe 1 représente la fonction densité associée.

Partie A

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X\leq 1)$.
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B

On pose $\lambda=1,5$

1. Calculer $P(X\leq 1)$, calculer une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} prés par excès.
2. Calculer $P(X\geq 2)$.
3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante à 10^{-3} prés : $P(1\leq X\leq 2)=0,173$
4. Calculer l'intégrale $F(x)=\int_0^x 1,5t e^{-1,5t}dt$.

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. On obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine-outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=1,5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   a) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est de 0,915 à 10^{-3} prés.
   b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2. On prélève de manière indépendante 10 cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   a) Quelle est la probabilité que les 10 cylindres soient acceptés ?
   b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

La durée de vie d'un robot (Bac série S, Liban 2006)

La durée de vie d'un robot exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à :
$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

1. Déterminer λ arrondi à 10^{-2} prés, pour que la probabilité $P(X>6)$ soit égale à 0,3.
Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.
2. A quel instant t à un mois prés, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est de $e^{-0{,}4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est à 10^{-2} prés, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considère un lot de dix robots fonctionnant de manière indépendante.
Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

La fabrication d'appareils électroniques (Bac série S, Amérique du sud, 2005)

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants tous identiques en apparence, mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant soit défectueux est égale à 0,02.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilés à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? En donner une valeur approchée à 10^{-2} prés.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? En donner une valeur approchée à 10^{-2} prés.
3. Quel est dans un lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5\times10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 10^{-4}$.

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieur à 1000 heures :
    a) si ce composant est défectueux
    b) si ce composant n'est pas défectueux

Donner une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-2} prés.

2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant achetés au hasard. Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :

$$P(T \geq t) = 0{,}02e^{-5\times10^{-4}\,t} + 0{,}98e^{-10^{-4}\,t}$$

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de marche 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ? En donner une valeur approchée à 10^{-3} prés.

Temps d'attente à un guichet (Bac série S, Guadeloupe, Guyane, 2005)

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t minutes est définie par $P(T\leq t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$ et le temps moyen d'attente est donné par $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx$ en fonction de t. En déduire que le temps moyen d'attente est de $\frac{1}{\lambda}$.
2. Le temps moyen d'attente étant de 5 minutes, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes ? plus de 5 minutes ?
3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 minutes, sachant qu'on a déjà attendu 10 minutes ? Comment expliquer ce résultat ?

CORRECTION

Exercices de baccalauréat
série S
sur la loi exponentielle

Correction - La compagnie d'autocars (centres étrangers, série S, 2003)

1. La probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit :

   a) comprise entre 50 et 100 km :

   $$P(50\le D\le 100)=\int_{50}^{100}\frac{1}{82}e^{-\frac{x}{82}}dx=F(100)-F(50)=-e^{-\frac{100}{82}}+e^{-\frac{50}{82}}\approx 0{,}248.$$

   b) supérieure à 300 km :

   $$P(D>300)=1-P(D\le 300)=1-\int_{0}^{300}\frac{1}{82}e^{-\frac{x}{82}}dx=1-(F(300)-F(0))=e^{-\frac{300}{82}}\approx 0{,}026.$$

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km, c'est-à-dire :

$$P_{(D\ge 350)}(D\ge 375)=P_{(D\ge 350)}(D\ge 350+25)=P(D\ge 25)=e^{-\frac{25}{82}}\approx 0{,}737$$

3. La distance moyenne en kilomètres parcourue sans incident :

   a) A l'aide d'une intégration par partie $I(A)=\int_{0}^{A}\frac{1}{82}x\,e^{-\frac{x}{82}}dx=-Ae^{-\frac{A}{82}}-82e^{-\frac{A}{82}}+82$

   b) La limite de I(A) lorsque A tend vers $+\infty$ est 82.

4. L'entreprise possède N_0 autocars. X_d est la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.

   a) X_d suit la loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$: il y a N_0 épreuves identiques et indépendantes "un autocar parcourt d km au moins". Le succès lors de ces N_0 épreuves est de parcourir d km sans incident, soit p la probabilité du succès, $p=P(D\ge d)=e^{-\frac{d}{82}}$

   b) Le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km est l'espérance de X_d. $E(X_d) = N_0e^{-\lambda d}$.

Correction - Durée de vie d'un composant électronique (France métropolitaine, 2004)

1. On sait que P([0 ; 200[) = 0,5

P([0 ; 200[)= $\int_0^{200}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-200\lambda}+1=0,5$ est l'équation qui donne $\lambda=\frac{\ln 2}{200}$.

2. La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines est P(t≥300) = 1– P(t≤ 300) = 1–(1–$e^{-\lambda\times 300}$) =$e^{-\lambda\times 300}$ $=e^{-\frac{3}{2}\ln 2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx 0,35$

3. A l'aide d'une intégration par partie, on a $\int_0^{A}\lambda x e^{-\lambda x}\,dx=\frac{-\lambda A e^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}$

On en déduit $d_m=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^{A}\lambda x e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda}=\frac{200}{\ln 2}\approx 289$ semaines.

Correction - Durée de vie d'un oscilloscope (Polynésie, 2004)

1. On a $P(X>10) = 0,286 = e^{-10\lambda}$, équation qui donne $\lambda = 0,125$ au centième près.
Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,125$.

2. La probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois s'écrit $P(X\leq 0,5)$.
$P(X\leq 0,5) = 1 - e^{-0,5\times 0,125} = 1 - e^{-0,0625} \approx 0,061$

3. L'appareil a déjà fonctionné 8 années, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans est donnée par : $P_{(X>8)}(X>10)$ avec $P(X>8) = e^{-8\times 0.125}$.
$P((X>10)\cap(X>8)) = P(X>10) = e^{-10\times 0.125}$

$$P_{(X>8)}(X>10)=\frac{P((X>10)\cap(X>8))}{P(X>8)}=\frac{e^{-10\times 0.125}}{e^{-8\times 0.125}}=e^{-2\times 0.125}=P(X>2)\approx 0.779$$

4. On est en présence d'un schéma de Bernoulli. La durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable à commandé 15 oscilloscopes. La probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans est la probabilité d'un "succès" et on sait qu'elle vaut $P(X>10) = 0,286$.
L'événement "au moins un oscilloscope parmi les 15 a une durée de vie supérieure à 10 ans" est l'événement contraire de "tous les appareils ont une durée de vie inférieure à 10 ans" de probabilité $(1 - 0,286)^{15} = 0,714^{15}$.
La probabilité qu'au moins un oscilloscope parmi les 15 ait une durée de vie supérieure à 10 ans est donc $1 - 0,714^{15} \approx 0,779$.

5. On reprend la situation de la question précédente avec n oscilloscopes et on cherche n tel que $1 - 0,714^n \geq 0,999$ inéquation équivalente à $0,714^n \leq 10^{-3}$ et qui donne $n\geq\frac{\ln 10^{-3}}{\ln 0,714}\approx 20,5$.
L'établissement devrait acheter 21 oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Correction - Extrait d'un QCM (Réunion, 2003)

La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :

a. FAUX. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = 0{,}01e^{-0{,}01t}$

b. VRAI. Pour tout réel t positif, $P(Y \leq t) = \int_0^t 0{,}01e^{-0{,}01x}dx = 1 - e^{-0{,}01t}$

c. FAUX. 3 minutes font 180 secondes. On cherche donc : $P(Y \leq 180) = 1 - e^{-1{,}8} \approx 0{,}83$

d. VRAI. L'attente supérieure à une minute se traduit par Y>60. $P(Y > 60) = 1 - P(Y \leq 60) = e^{-0{,}6} \approx 0{,}55$. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

Correction - La fabrique de cylindres (Bac série S, Guadeloupe, Guyane, 2006)

Partie A

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X\leq 1)=\int_0^1 \lambda e^{-\lambda t}dt$: c'est l'aire du domaine délimité par la droite d'équation x=1, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe de la densité.
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ : la valeur de la fonction densité en 0 est égale à λ, que l'on lit comme l'ordonnée de l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées, on lit environ 1,5.

Partie B

On pose $\lambda=1{,}5$

1. Calcul de $P(X\leq 1)$

$P(X\leq 1)=\int_0^1 \lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-1,5t}\right]_0^1=-e^{-1,5}+1\approx 0{,}777$ par excès.

2. Calcul de $P(X\geq 2)$.

$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\int_0^2 \lambda e^{-\lambda t}dt=1-\left[-e^{-1,5t}\right]_0^2=e^{-3}$

3. A 10^{-3} prés : $P(1\leq X\leq 2)=P(X\leq 2)-P(X\leq 1)=1-P(X>2)-P(X<1)$

$=1-e^{-3}-(-e^{-1,5}+1)=e^{-1,5}-e^{-3}\approx 0{,}173$

4. Calcul de l'intégrale $F(x)=\int_0^x 1{,}5te^{-1,5t}dt$.

Par une intégration par parties, on pose $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=1{,}5e^{-1,5t}\end{cases}$ qui donne $\begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=-e^{-1,5t}\end{cases}$

On obtient $F(x)=-xe^{-1,5x}-\frac{1}{1{,}5}e^{-1,5x}+\frac{1}{1{,}5}$

L'espérance mathématique de X est la limite de F(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

On calcule aisément $E(X)=\frac{1}{1{,}5}$ et on remarque que $E(X)=\frac{1}{\lambda}$, résultat attendu.

Partie C

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

Considérons les événements A : "le cylindre est accepté" et B : "le cylindre est rectifié". On sait alors, d'après ce qui précède que :

$P_R(A)=0{,}8$ et $P(A\cap\overline{R})=P(X\leq 1)=-e^{-1,5}+1$ et $P(R)=P(1\leq X\leq 2)=e^{-1,5}-e^{-3}$

a) $P(A)=P(A\cap R)+P(A\cap\overline{R})=P_R(A)\times P(R)+P(A\cap\overline{R})$

$=0{,}8\times(e^{-1,5}-e^{-3})-e^{-1,5}+1\approx 0{,}915$

b) Sachant qu'il est accepté, la probabilité qu'il ait subi une rectification est

$P_A(R)=\frac{P(A\cap R)}{P(A)}=\frac{0{,}8\times(e^{-1,5}-e^{-3})}{0{,}8\times(e^{-1,5}-e^{-3})-e^{-1,5}+1}\approx 0{,}151$

2. On prélève de manière indépendante 10 cylindres de la production. La variable aléatoire Z égale au nombre de cylindres acceptés suit la loi binomiale de paramètres n=10 et p=P(A)

a) La probabilité que les 10 cylindres soient acceptés est $p^{10}\approx 0{,}414$

b) La probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé est $1-p^{10}\approx 0{,}586$.

Correction - La durée de vie d'un robot (Bac série S, Liban 2006)

La durée de vie d'un robot exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à :
$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

1. Déterminons λ pour que la probabilité $P(X>6) = 0,3$.
Cela s'écrit aussi $1 - P(X\leq 6) = 0,3$ soit $P(X\leq 6) = 0,7$ ou encore : $\int_0^6 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,7$

soit $\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^6 = 0,7$ qui donne $-e^{-6\lambda} = 0,3$ enfin nous obtenons

$\lambda = -\frac{1}{6}\ln(0,3) \approx 0,20$ arrondi à 10^{-2} prés.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. On cherche t tel que $P(X\leq t) = \int_0^t 0,2\, e^{-0,2x} dx = 0,5$ ce qui équivaut à $\left[-e^{-0,2x}\right]_0^t = 0,5$
soit $-e^{-0,2t} + 1 = 0,5$ ou encore $e^{-0,2t} = 0,5$ enfin, nous obtenons par passage au logarithme $-0,2t = -\frac{1}{5}t = \ln(0,5) = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$ d'où $t = 5\ln(2) \approx 3,47$ années soit finalement 42 mois.

3. La probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est de $e^{-0,4}$. En effet : $P(X>2) = 1 - P(X\leq 2) = 1 - \left[-e^{-0,2x}\right]_0^2 = 1 + e^{-0,4} - 1 = e^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans est
$\frac{P(X>6)}{P(X>2)} = \frac{e^{-0,2\times 6}}{e^{-0,2\times 2}} = e^{-0,8} \approx 0,45$ à 10^{-2} prés

5. On considère un lot de dix robots fonctionnant de manière indépendante. Nous savons que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est de $e^{-0,4}$.
La probabilité qu'aucun robot sur les dix n'ait eu de panne au cours des deux premières années est de $\left(1-e^{-0,4}\right)^{10}$

La probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est donc de $1-\left(1-e^{-0,4}\right)^{10} \approx 0,999985$.

Correction - La fabrication d'appareils électroniques (Bac série S, Amérique du sud, 2005)

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilés à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. La variable X suit la loi binomiale de paramètres n=50 et p=0,02. La probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux est :

$P(X=2)=\binom{50}{2}\times(0,02)^2\times(0,98)^{48}\approx0,19$ valeur approchée à 10^{-2} prés.

2. Donnons d'abord la probabilité qu'aucun composant ne soit défectueux : $(0,98)^{50}$.
La probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux est donc
$1-(0,98)^{50}\approx0,64$ valeur approchée à 10^{-2} prés.
3. Dans un lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux est l'espérance de X soit $50\times0,02=1$.

Partie B

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieur à 1000 heures :
   a) si ce composant est défectueux :
   $P(T_1\geq1000)=1-\int_0^{1000}5\times10^{-4}e^{-5\times10^{-4}x}dx=1-\left[-e^{-5\times10^{-4}x}\right]_0^{1000}=e^{-0,5}\approx0,61$
   b) si ce composant n'est pas défectueux :
   $P(T_2\geq1000)=1-\int_0^{1000}10^{-4}e^{-10^{-4}x}dx=1-\left[-e^{-10^{-4}x}\right]_0^{1000}=e^{-0,1}\approx0,90$
2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant achetés au hasard.
Notons A et D respectivement les événements $(T\leq t)$ et "le composant est défectueux", on peut décomposer $A=(D\cap A)\cup(\overline{D}\cap A)$. De plus, on sait que $P(D)=0,02$.

$$\begin{aligned}P(T\geq t)=P(A)&=P(D)\times P_D(A)+P(\overline{D})\times P_{\overline{D}}(A)=P(D)\times P_D(T\geq t)+P(\overline{D})\times P_{\overline{D}}(T\geq t)\\&=0,02\times(1-1+e^{-5\times10^{-4}t})+0,98(1-1+e^{-10^{-4}t})\\&=0,02e^{-5\times10^{-4}t}+0,98e^{-10^{-4}t}\end{aligned}$$

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de marche 1000 heures après son installation, la probabilité que ce composant soit défectueux est :

$$P_{T\geq1000}(D)=\frac{P(D\cap(T\geq1000))}{P(T\geq1000)}=\frac{0,02e^{-5\times10^{-4}\times1000}}{0,02e^{-5\times10^{-4}\times1000}+0,98e^{-10^{-4}\times1000}}\approx0,013 \text{ à } 10^{-3} \text{ prés.}$$

Correction - Temps d'attente à un guichet (Bac série S, Guadeloupe, Guyane, 2005)

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$ en fonction de t.

On pose $\begin{cases} u(x)=\lambda x \\ v'(x)=e^{-\lambda x} \end{cases}$ puis $\begin{cases} u'(x)=\lambda \\ v(x)=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{cases}$

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-\lambda x} dx = -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}$$

Le temps moyen d'attente est $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 minutes, cela signifie que $\lambda = \frac{1}{5}$.

La probabilité d'attendre plus de 10 minutes est :

$P(X>10) = P(X\geq 10) = 1 - P(X<10) = 1 - \int_0^{10} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx = 1 - \left[-e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^{10} = e^{-2} \approx 0{,}135.$

La probabilité d'attendre plus de 5 minutes est :

$P(X>5) = 1 - P(X<5) = 1 - \int_0^5 \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx = 1 - \left[-e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^5 = e^{-1} \approx 0{,}368.$

3. La probabilité d'attendre encore au moins 5 minutes, sachant qu'on a déjà attendu 10 minutes, est une probabilité conditionnelle.

Calculons d'abord $P(X\geq 15) = 1 - P(X\leq 15) = 1 - \int_0^{15} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx = 1 - \left[-e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^{15} = e^{-3}$.

Puis, $P_{X\geq 10}(X\geq 15) = \frac{P(X\geq 10 \text{ et } X\geq 15)}{P(X\geq 10)} = \frac{P(X\geq 15)}{P(X\geq 10)} = \frac{e^{-3}}{e^{-2}} = e^{-1} \approx 0{,}368.$

Comment expliquer ce résultat ? On voit que $P_{X\geq 10}(X\geq 15) = P(X\geq 5)$, ce qui veut dire que la probabilité conditionnelle ne tient pas compte du temps déjà écoulé, ici les 10 minutes. C'est que la loi exponentielle caractérise les phénomènes "sans usure" ou sans "vieillissement".